EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

Es un conjunto denotado por $\mathbb{R}$, provisto de dos operaciones: la adición $(+)$, la multiplicación $(\cdot)$ y una relación de orden $(<)$ "menor que" que verifica los siguientes tres grupos de propiedades básicas (axiomas).

Axiomas de cuerpo (propiedades algebraicas)		
Propiedades	**Adición**	**Multiplicación**
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Existencia del elemento neutro	Existe un número real llamado "cero" y que indicamos "0" tal que para todo número real a vale que: $a+0=0+a=a$	Existe un número real **distinto de cero** que llamamos "uno" e indicamos con "1" tal que para todo número real a vale: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
Existencia del elemento inverso	Inverso aditivo u opuesto de a es $-a$ $a+(-a)=0$	Inverso multiplicativo o recírpoco de a $(a\neq 0)$ es a^{-1} $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$
Distributiva de la multiplicación respecto de la Adición	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	

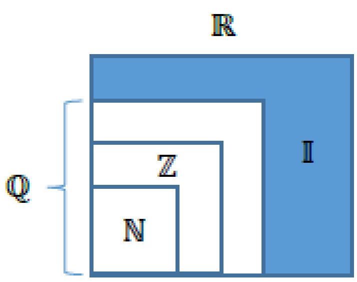
Nota: la sustracción se define: $a-b=a+(-b)$ y la división se define por $\dfrac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$

Axiomas de orden (propiedades de orden)
En el sistema de los números reales existe una relación $<$ (se lee: "es menor que") definida como $a<b \Leftrightarrow b-a\in\mathbb{R}^{+}$; que establece una ordenación en los números reales y que verifica los siguientes axiomas:
Sea P el conjunto de los números positivos y O el conjunto cuyo único elemento es el cero.

- **Axioma I**. Sea $a\in\mathbb{R}$ se cumple una y sólo un de **(1)** $a\in P$, **(2)** $a\in O$, **(3)** $-a\in P$.
- **Axioma II**. Si $a,b\in P$, entonces: **(1)** $a+b\in P$, o bien **(2)** $a\cdot b\in P$.

Propiedades $(\forall a,b,c\in\mathbb{R})$		
Tricotomía	$a<b$, $\quad a=b$, $\quad b>a$	
Transitiva	$a<b\wedge b<c\Rightarrow a<c$	
Aditiva Monotonía de la suma	$a<b\Rightarrow a+c<b+c$	
Multiplicativa Monotonía para el producto	Cuando c es positiva, $a<b\Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$	Cuando c es negativa, $a<b\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

Axioma del supremo (de completitud o continuidad)
Todo conjunto de números reales $A\subset\mathbb{R}$, no vacío $(A\neq\emptyset)$ y acotado superiormente tiene supremo (cota superior mínima).
Este último axioma garantiza una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos en la recta o eje real.



$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}=\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\emptyset$