Tensegrities

Luc Van den Broeck

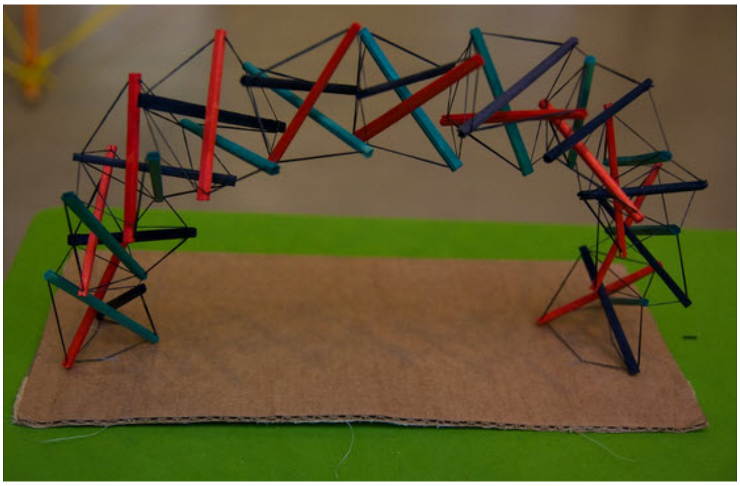
1 januari 2016

Samenvatting

Dit project over *tensegrities* past in het thema van de Nacht van de Toren jaargang 2016. Tijdens deze openschoolnacht draait alles rond *evenwicht*. Tensegrities (in het Nederlands: *houtje-touwtje-constructies*) zijn composities met zwevende houten staafjes die elkaar niet raken maar die toch in evenwicht blijven door de gepaste trekspanning in de verbindingstouwtjes. Hoewel het assortiment aan kunstzinnige tensigrities zeer groot is, focussen we ons hier slechts op het type waarbij de staafjes een eenbladige hyperboloïde (een ruimtelichaam in de vorm van een koeltoren) afbakenen.

1 Wat zijn tensegrities?

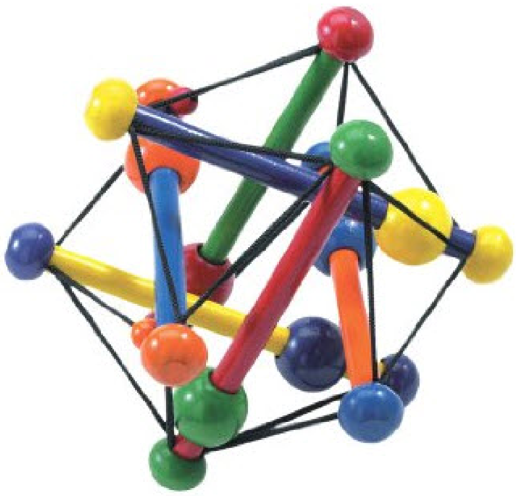
Het woord *tensegrity* is een samentrekking van *tensional structural integrity*, waarmee men een ruimtelijke structuur bedoelt die in evenwicht gehouden worden door trekspanningen. Een *tensegrity* bestaat meestal uit een serie rechte, houten staafjes, die elkaar niet raken maar die verbonden zijn met stevig aangespannen draden. De spankracht in de draden is zo dat de hele constructie overeind blijft. Verwijdert men één staafje of knipt men één van de draden door dan stuikt het bouwwerk ineen. De trekkrachten in deze constructies worden dus opgevangen door de draden, de drukkrachten door de staafjes.



Figuur 1: Tensegrity in de vorm van een brug

Het is niet duidelijk wanneer en door wie de tensegrities uitgevonden zijn. Sommige bronnen verwijzen naar de Letse student Karl Ioganson, die rond de jaren 1920 experimenteerde met eenvoudige spanconstructies. Andere bronnen verwijzen naar de Amerikaanse student Kenneth Snelson, die in het jaar 1948 geïnspireerd raakte door de bekende architect Buckminster Fuller (de uitvinder van de geodetische koepels) en hierdoor begon te knutselen met touw, klei, karton en zelfs met conservenblikken. Het was Buckminster Fuller die de term *tensegrity* voor het eerst gebruikte. Hij omschreef de zwevende staafjes in een tensegrity als *compression elements in a sea of tension.*

De laatste jaren worden tensegrities verwerkt in houten speelgoed en in designvoorwerpen zoals tafels, krukjes en lampen. Je ontmoet deze structuren af en toe ook in openluchtkunst. Bekende kunstenaars en designers die zich toelegden op het genre van de tensegrities zijn Marco Pars, Kenneth Snelson, Onno van Dokkum en Tom Flemons. Van deze laatste is de *skwish* de meest bekende uitvinding. Deze tensegrity is in bijna om het even welke winkel met babyartikelen te koop. De touwtjes zijn hier vervangen door krachtige elastieken, waardoor de staafjes onmiddelijk terug in hun evenwichtsstand springen wanneer de constructie platgedrukt wordt.

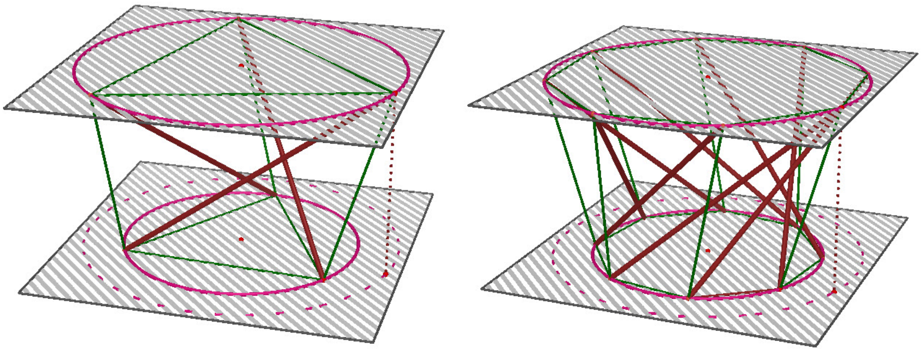


Figuur 2: De skwish van Tom Flemons

2 Hyperbolische tensegrities

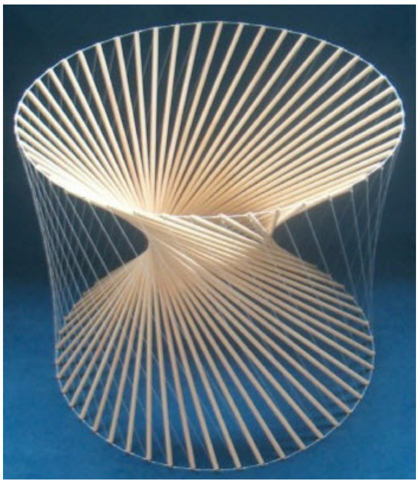
Een van de eenvoudigste tensegrities bestaat uit n staafjes van gelijke lengte die zweven op een denkbeeldige eenbladige hyperboloïde. Een eenbladige hyperboloïde is het oppervlak dat we kennen als de koeltoren van een kerncentrale. De eindpunten van deze n staafjes vormen de hoekpunten van twee regelmatige n-hoeken die in evenwijdige vlakken liggen.

Op figuur 3 zie je twee voorbeelden van dit model, eentje met drie staafjes en eentje met acht staafjes. Je merkt vast wel op dat de twee n-hoeken in de evenwijdige vlakken niet even groot hoeven te zijn. Ze zijn wel netjes boven elkaar uitgelijnd. De donkerbruine lijnstukken zijn de staafjes van de tensegrity. De groene lijnstukken zijn de touwtjes. Elk van deze composities heeft touwtjes van drie verschillende afmetingen: de zijden van de onderste n-hoek, de zijden van de bovenste n-hoek en de verbindingslijnstukken van twee n-hoeken.



Figuur 3: Twee eenvoudige tensegrities

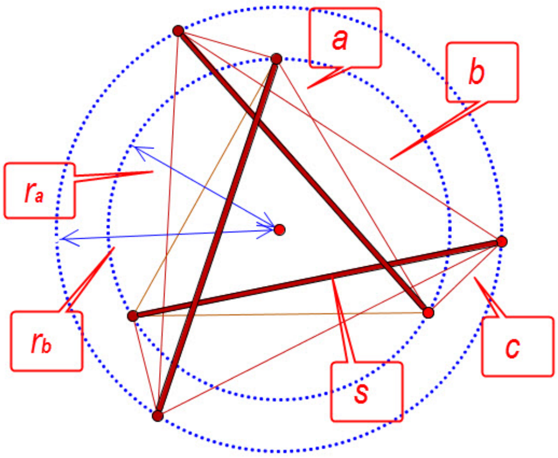
De Nederlander Marcello Pars ontwierp op basis van dit eenvoudige model het onderstaande kunstwerk met dunne satéprikkers en bijna onzichtbare nylondraad. Dit prototype, waarbij de hyperboloïde duidelijk afgetekend is, staat centraal in het project.



Figuur 4: De hyperboloïde van Marcelo Pars

3 De driezijdige tensegrity

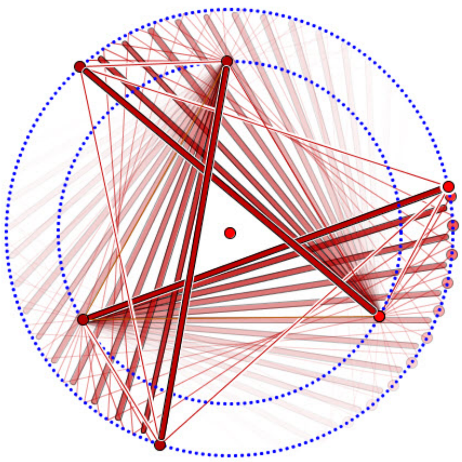
Om te weten te komen welke de verhoudingen zijn tussen alle draadjes en staafjes van de tensegrity van Pars, moeten er verschillende berekeningen gemaakt worden. We beginnen in deze paragraaf met een studie van de driezijdige tensegrity.



Figuur 5: De driezijdige tensegrity

Figuur 5 toont een bovenaanzicht van de driezijdige tensegrity. Hierop worden alle variabelen vermeld aan die we in deze berekening zullen gebruiken: de zijde a van de onderste driehoek, de zijde b van de bovenste driehoek, de lengte c van de draden die de twee driehoeken verbinden, de lengte s van de stokjes en de stalen r_a en r_b van de omgeschreven cirkels van de twee diehoeken.

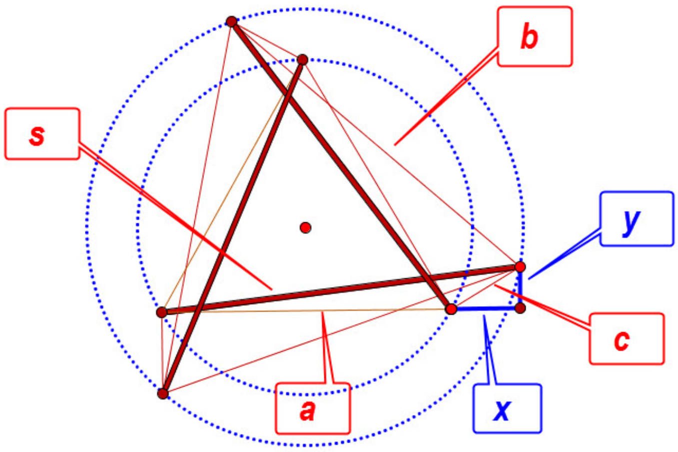
Drie van deze variabelen kunnen we vrij kiezen. Als we bijvoorbeeld een vaste waarde nemen voor a, b en s dan blijkt de tensegrity vast te liggen. Dit is niet evident want als je de tensegrity zou willen maken met drie touwtjes van lengte a, drie touwtjes van lengte b en drie stokjes van lengte s dan blijkt de constructie nog beweegbaar te zijn.



Figuur 6: Een van deze standen is de evenwichtsstand

Beeld je eens in dat de verbindingstouwtjes tussen de twee driehoeken vervangen worden door elastiekjes. Je kan de hoogte z van de tensegrity dan nog steeds aanpassen zonder a, b en s te wijzigen. Als je z wijzigt dan zullen de twee driehoeken ten opzichte van elkaar roteren en dan zal de lengte c van de drie verbindingselastiekjes groter of kleiner zal worden. Een van deze standen zorgt voor een minimale lengte (c_{min}) van de elastiekjes. Deze stand noemen we de evenwichtsstand. Fysische wetten garanderen dat in constructies met elastiekjes, veren en kabels een evenwicht wordt bereikt bij een minimale lengte (en een maximale trekspanning) van deze constructie-elementen.

Het is perfect mogelijk de evenwichtsstand op een experimentele manier op te sporen. Je kan bijvoorbeeld met een driedimensionaal meetkundeprogramma op zoek gaan naar dit evenwicht door de bovenste driehoek te laten draaien ten opzichte van de onderste (terwijl a, b en s constant blijven). Tijdens deze simulatie meet je de lengte c na en zoek je een benadering voor c_{min}.



Figuur 7: De tensegrity ligt vast door de keuze van x en y

In dit project gaan we niet experimenteel te werk maar bepalen we de evenwichtsstand op een algebraïsche manier. Vooreerst zoeken we twee verbanden tussen de variabelen die toestand van de tensegrity beschrijven. Vermits de onderste driehoek verankerd is en de bovenste driehoek kan roteren, leggen de coördinaten x, y en z van het bovenste eindpunt van het voorste staafje de tensegrity volledig vast. Op figuur 7 kan je zien wat met de coördinaten x en y bedoeld wordt. De z-coördinaat moet je je loodrecht op de figuur inbeelden.

$$s^2 = (a + x)^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

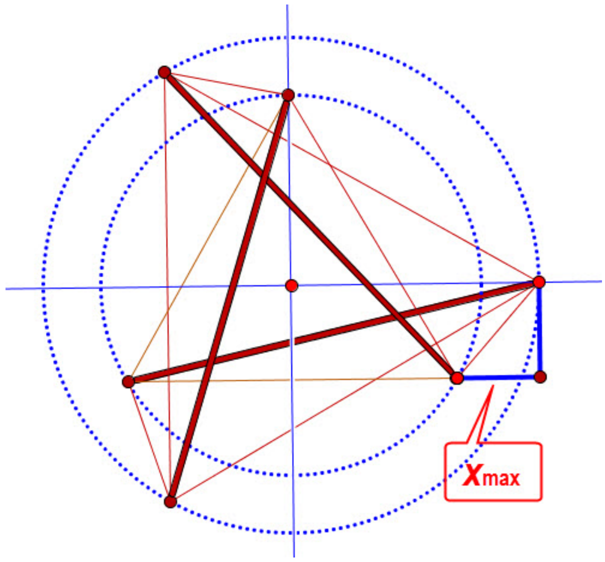
$$c^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2}$$

Oefening 1 *Verklaar de formules 1 en 2*

Uit deze formules volgt dat

$$c^2 = s^2 - a^2 - 2ax. \tag{3}$$

Oefening 2 *Toon formule 3 aan.*



Figuur 8: De grootst mogelijke waarde voor x

Aan het begin van dit hoofdstuk hebben we beslist om de variabelen a, b en s vast te nemen. De enige variabelen in formule 3 zijn c en x. Indien we c zo klein mogelijk willen maken, moeten we x zo groot mogelijk nemen.

Oefening 3 *Verklaar dit.*

De grootst mogelijke waarde voor x is afgebeeld in figuur 8. We noemen deze waarde x_{max}. Uit figuur 8 kan je de volgende gelijkheden afleiden

$$x_{max} = r_b - \frac{1}{2}a \tag{4}$$

$$r_b = \frac{b}{2\sin 60°}. \tag{5}$$

Oefening 4 *Geef een verklaring voor deze twee gelijkheden.*

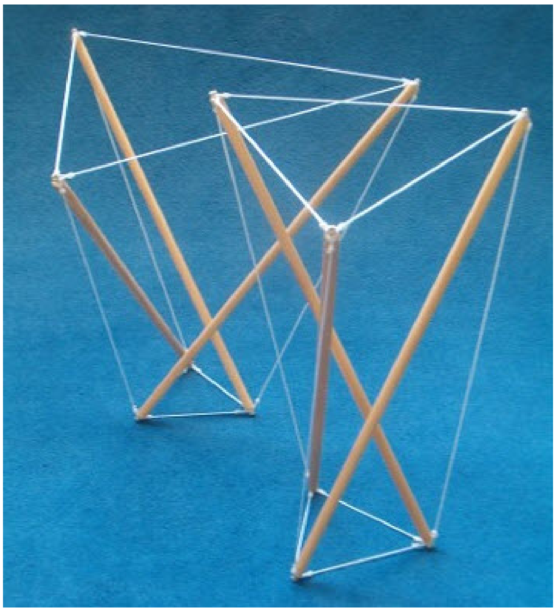
De combinatie van de formules (3), (4) en (5) leidt tot

$$c_{min}^2 = s^2 - \frac{ab}{\sin 60°}. \tag{6}$$

Oefening 5 *Reken deze gelijkheid na.*

Oefening 6 *Stel dat $s = 20$, $a = 7$ en $b = 11$. Bereken uit deze waarden de lengte c_{min} van de verbindingsdraden tussen de twee driehoeken.*

Oefening 7 *Kies zelf waarden voor s, a en b en knutsel de bijbehorende tensegrity met dunne rondhouten staafjes. In de uiteinden van deze rondhoutjes timmer je kleine kopnageltjes of schroef je kleine oogvijsjes. Daaraan bevestig je draden van de gepaste lengte. Zorg ervoor dat de draden stevig zijn en niet uitrekken. Een voorbeeld van dit knutselwerk zie je op figuur 9.*



Figuur 9: Driezijdige tensegrities geknutseld met rondhout

4 De vijfzijdige tensegrity

Net zoals er twee manieren zijn om de hoekpunten van een regelmatige vijfhoek op een regelmatige manier te verbinden (de gewone vijfhoek en de vijfhoekige ster), zijn er ook bij de vijfhoekige tensegrity twee manieren om de hoekpunten van de twee vijfhoeken met staafjes en draden te verbinden. Hieronder zie je het bovenaanzicht van de twee versies. Bij het eerste type verbinden de opstaande draden de boven en onderkant van opeenvolgende staafjes. Bij het tweede type verbinden de opstaande draden twee staafjes die niet opeenvolgend zijn maar wordt er telkens een staafje tussen gelaten.

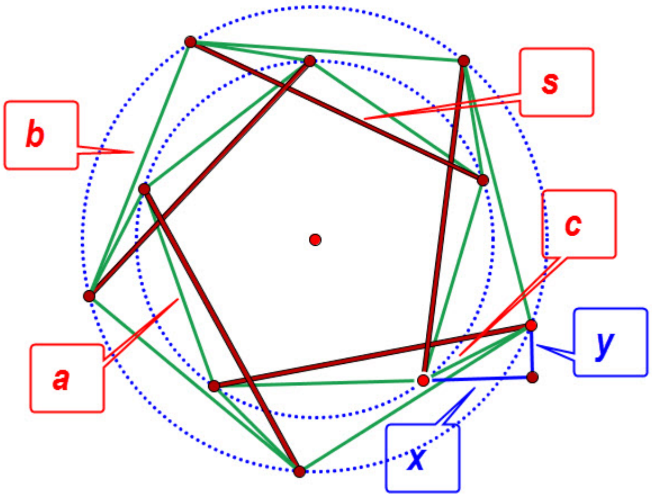
We voeren een notatie in die vergelijkbaar is met het vorige hoofdstuk: a is de zijde van de onderste vijfhoek, b is de zijde van de bovenste vijfhoek, c is de lengte van een opstaande draad, s is de afmeting van een staafje en r_a en r_b zijn de stralen van de omgeschreven cirkels van beide vijfhoeken. Verder stellen x, y en z de coördinaten voor van één van de eindpunten van een staafje (zie afbeeldingen). Alleen voor de berekeningen bij tweede type is er nog een bijkomende variabele nodig: d is de diagonaal van de onderste vijfhoek.

Analoog aan formule 6 kunnen we de lengte van de opstaande draden voor de twee types berekenen met de respectievelijke formules:

$$c_{min}^2 = s^2 - \frac{ab}{\sin 36°} \tag{7}$$

$$c_{min}^2 = s^2 - \frac{ab \cdot \sin 72°}{\sin^2 36°}. \tag{8}$$

Oefening 8 *Bewijs de formule voor de vijfhoekige tensegrity van het eerste type door middel van de volgende deelvragen.*



Figuur 10: Eerste type van de vijfzijdige tensegrity

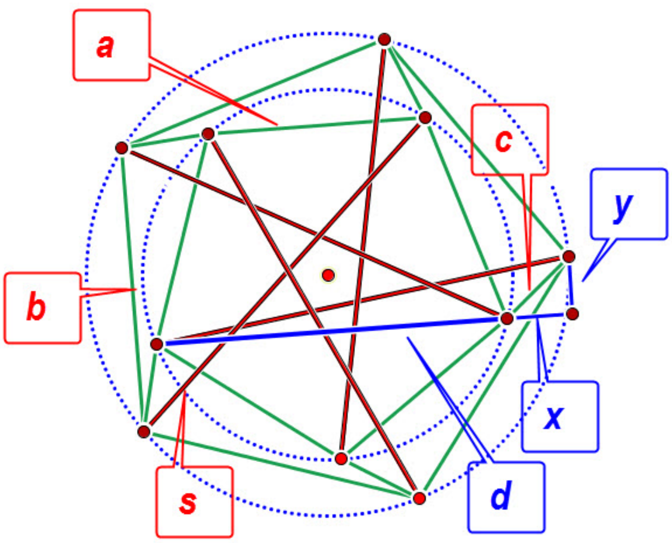
(a) *Toon aan dat* $c^2 = s^2 - a^2 - 2ax$.

(b) *Wanneer is c minimaal?*

(c) *Toon met een nieuwe tekening aan dat* $x_{max} = r_b - \frac{1}{2}a$.

(d) *Bewijs dat* $r_b = \frac{b}{2\sin 36^\circ}$.

(e) *Combineer de voorgaande formules en toon formule (7) aan.*



Figuur 11: Tweede type van de vijfzijdige tensegrity

Oefening 9 *Bewijs de formule voor de vijfhoekige tensegrity van het tweede type door middel van de volgende deelvragen.*

(a) *Toon aan dat* $c^2 = s^2 - d^2 - 2dx$.

(b) *Wanneer is c minimaal?*

(c) *Toon met een nieuwe tekening aan dat* $x_{max} = r_b - \frac{1}{2}d$.

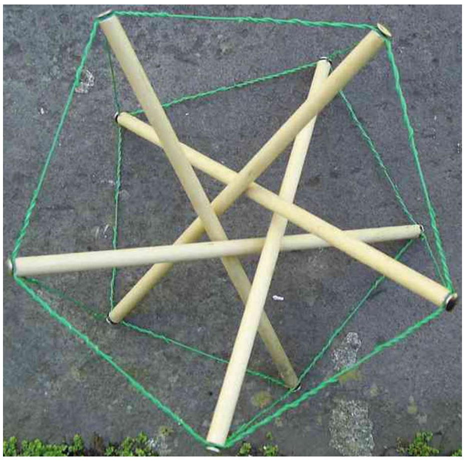
(d) *Ga na dat de diagonaal d van de onderste vijfhoek berekend kan worden met de formule* $d = 2r_a \sin 72°$.

(e) *Bewijs dat* $r_a = \frac{a}{2\sin 36°}$ *en dat* $r_b = \frac{b}{2\sin 36°}$.

(f) *Combineer de voorgaande formules om formule (8) aan te tonen.*

Oefening 10 *Stel* $s = 25$ *en* $a = 10$ *en* $b = 13$. *Bereken de waarden van* c_{min} *voor een vijfhoekige tensegrity van het eerste type en een vijfhoekige tensegrity van het tweede type.*

Oefening 11 *Knutsel een vijfhoekige tensegrity van het tweede type waarbij het bovenvlak groter is dan het grondvlak. Het resultaat kan er uitzien als de constructie op de onderstaande figuur.*



Figuur 12: Vijfzijdige tensegrity van het tweede type

5 De n-zijdige tensegrity

Stel dat je een tensegrity wil maken in de vorm van een eenbladige hyperboloïde. Je hebt dan meestal de keuze uit verschillende typen. De opstaande draden kunnen de boven- en onderkant van opeenvolgende staafjes verbinden. Je kan ook telkens een staafje tussen laten. Je kan er twee tussen laten, drie, vier, enz. Hoe meer staafjes je tussen laat, hoe smaller de taille van de hyperboloïde. Stel dat je telkens $k-1$ staafjes tussen wil laten. Voor dit model kan je aantonen dat

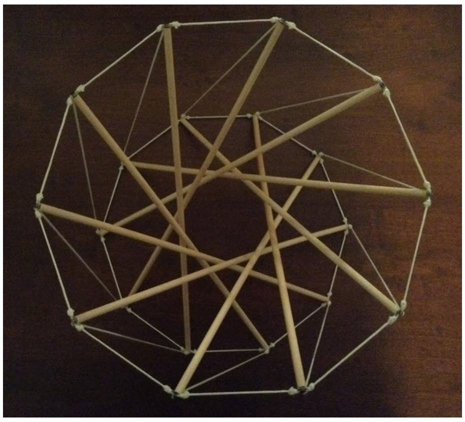
$$c_{min}^2 = s^2 - \frac{ab \cdot \sin \frac{k \cdot 180°}{n}}{\sin^2 \frac{180°}{n}}. \tag{9}$$

Oefening 12 *Op figuur (13) zie je een tienzijdige tensegrity met $a = 5$, $b = 7$ en $s = 20$.*

(a) *Hoeveel staafjes worden er telkens overgeslagen bij de verticale verbindingsdraden tussen grondvlak en bovenvlak? Waaraan is k dan gelijk?*

(b) *Bereken de waarde van c_{min} met behulp van formule 9.*

(c) *Maak deze tensegrity na met dun rondhout en nylonkoord.*



Figuur 13: Tienzijdige tensegrity

Oefening 13 *Stel dat je een twaalfzijdige tensegrity wil maken ($n = 12$) met a, b en s gegeven ($a \neq b$).*

(a) *Waarom zal de constructie met $k = 6$ technisch niet uitvoerbaar zijn?*

(b) *Verklaar waarom je geen echte twaalfzijdige tensegrity verkrijgt voor $k = 4$.*

(c) *Voor welke waarden van k krijg je wel een twaalfzijdige tensegrity?*

(d) *Welk verband is er tussen de tensegrities met $k = 5$ en $k = 7$? En tussen de tensegrities met $k = 1$ en $k = 11$?*

(e) *Hoeveel typen van twaalfzijdige tensegrities zijn volgens jou? En hoeveel typen van twintigzijdige tensegrities zijn er dan?*

(f) *Herinner je je de totientfunctie van Euler nog? Zo ja, formuleer dan het verband tussen het aantal typen van de hyperbolische tensegrity met n zijden en de totientwaarde $\phi(n)$.*

Inhoudsopgave

Referenties

[1] M. Bakker en M. Klerx, *Houtje-touwtje wiskunde*, workshop Nederlandse Wiskunde Dagen, 1 februari 2013.

[2] M. Pars, *Tensegrities*, `http://www.tensegriteit.nl/n-index.html`

[3] K. Snelson, *Kenneth Snelson, art and ideas*, `http://kennethsnelson.net/`